



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

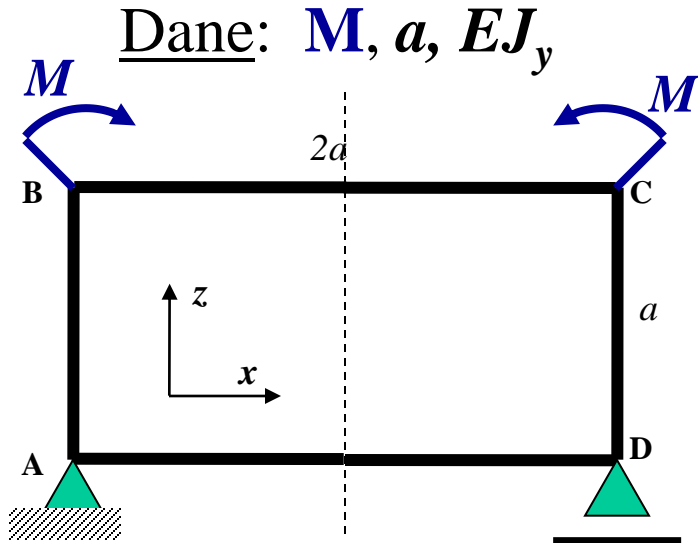


## Wykład 7

# Konstrukcje prętowe statycznie niewyznaczalne

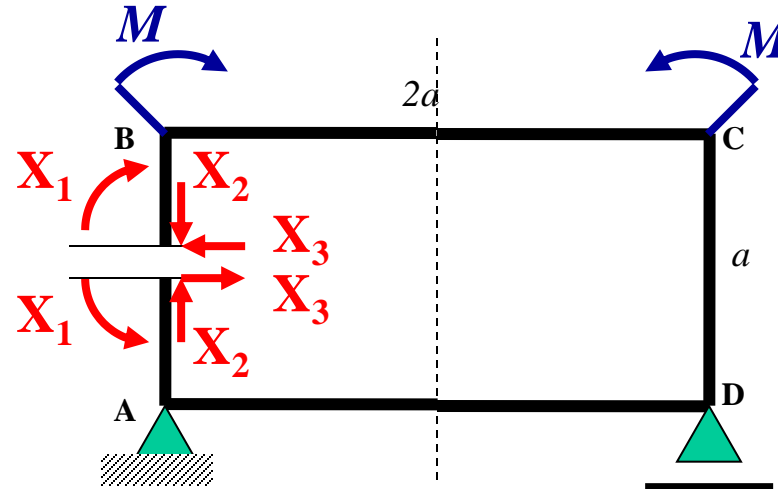
Uproszczenia wynikające z zasady  
jednoznaczności rozwiązania  
*(przykłady)*

**Przykład.1.** Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną wewnątrz



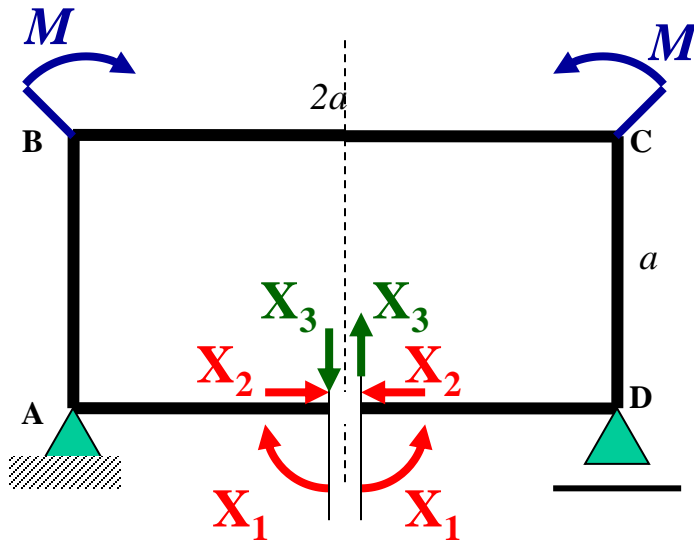
Zadanie statycznie wyznaczalne zewnętrznie ale **statycznie niewyznaczalne wewnątrz**

WYMYŚLAMY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Zadanie statycznie wyznaczalne zewnętrznie ale **3 krotnie statycznie niewyznaczalne wewnątrz!**

WYMYŚLAMY LEPSZY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



W ustroju liniowym i sprężystym jeden stan obciążenia wywołuje tylko jeden stan sił wewnętrznych!

**Konstrukcja symetryczna i obciążenie symetryczne!**  
 Jeśli przetniemy na osi symetrii, to istnieją **tylko składowe symetryczne sił wewnętrznych!**

$$X_1 \neq 0 \quad X_2 \neq 0$$

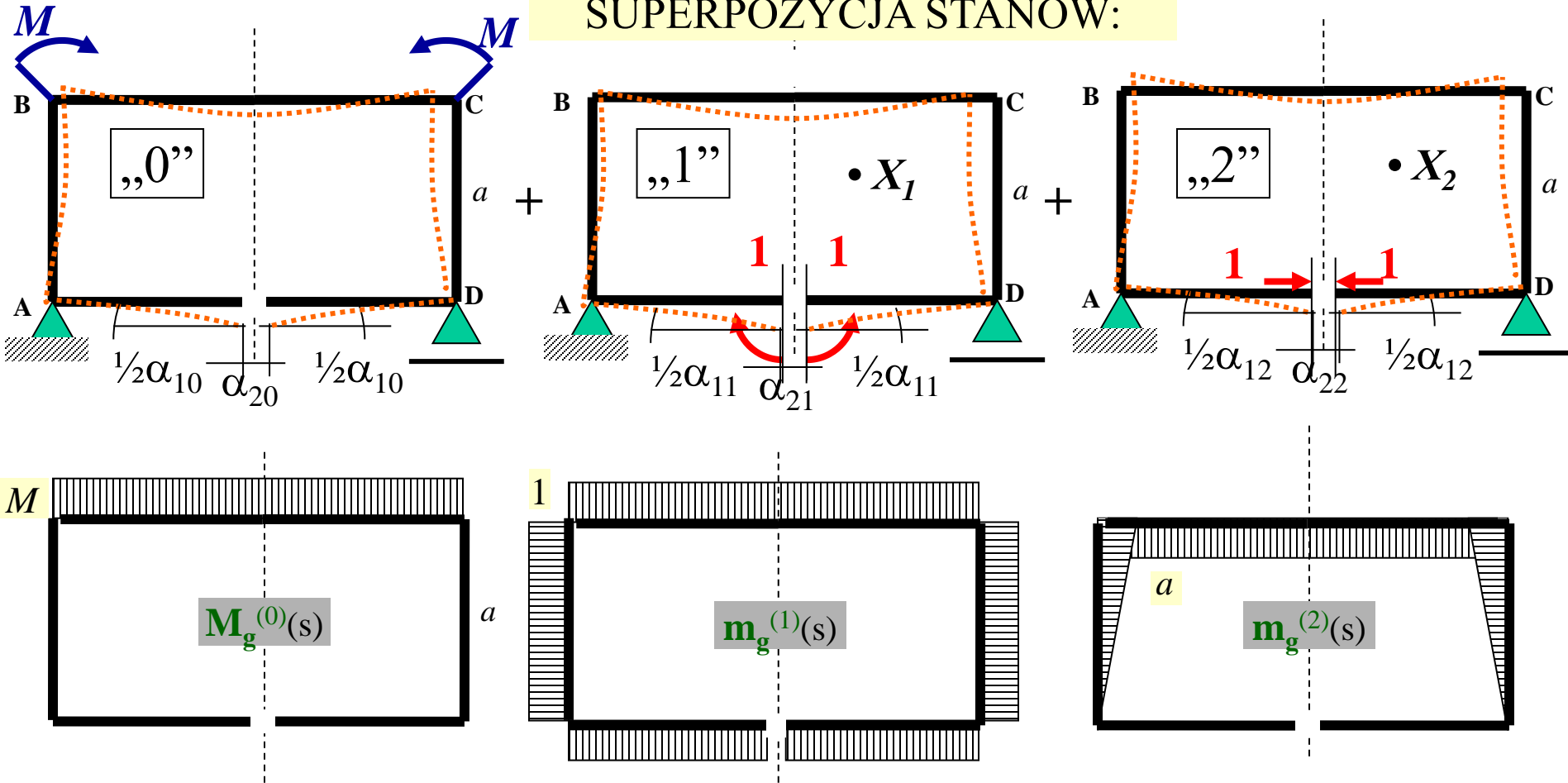
składowe symetryczne

$$X_3 = 0$$

składowa antysymetryczna

# Przykład.1. Rama ściśle płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrznie

## SUPERPOZYCJA STANÓW:



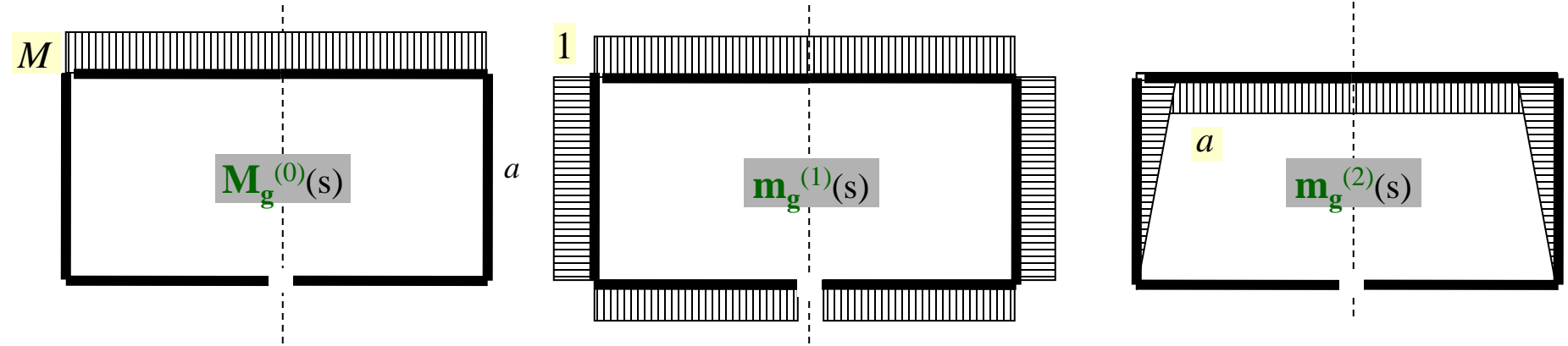
Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 = 0$$

Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

# Przykład.1. Rama płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrz



Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6 = \frac{6a}{EJ_y}$$

$$\alpha_{12} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left( -\frac{1}{2} a^2 \cdot 1 \cdot 2 - 2a^2 \cdot 1 \right) = -\frac{3a^2}{EJ_y}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$

$$\alpha_{22} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left( \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 + 2a^2 \cdot a \right) = \frac{8a^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{10} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} 2aM \cdot 1 = \frac{2Ma}{EJ_y}$$

$$\alpha_{20} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} 2aM \cdot (-a) = -\frac{2Ma^2}{EJ_y}$$

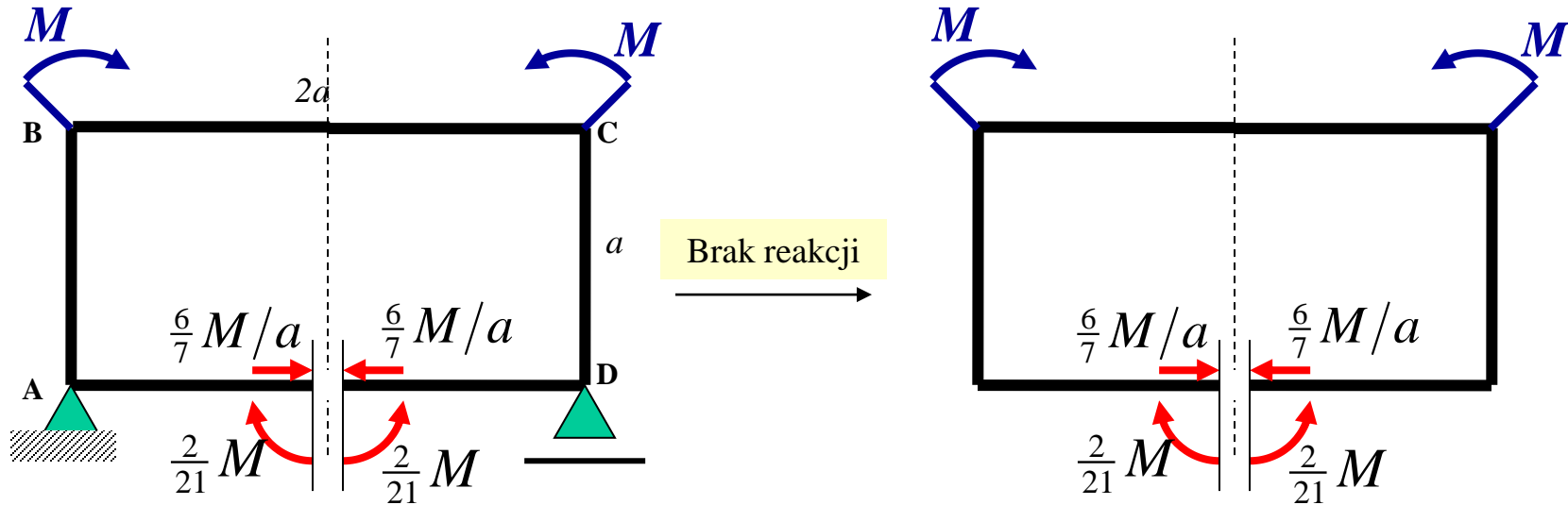
$$\frac{2Ma}{EJ_y} + \frac{6a}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{3a^2}{EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$\frac{-2Ma^2}{EJ_y} + \frac{3a^2}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{8a^3}{3EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

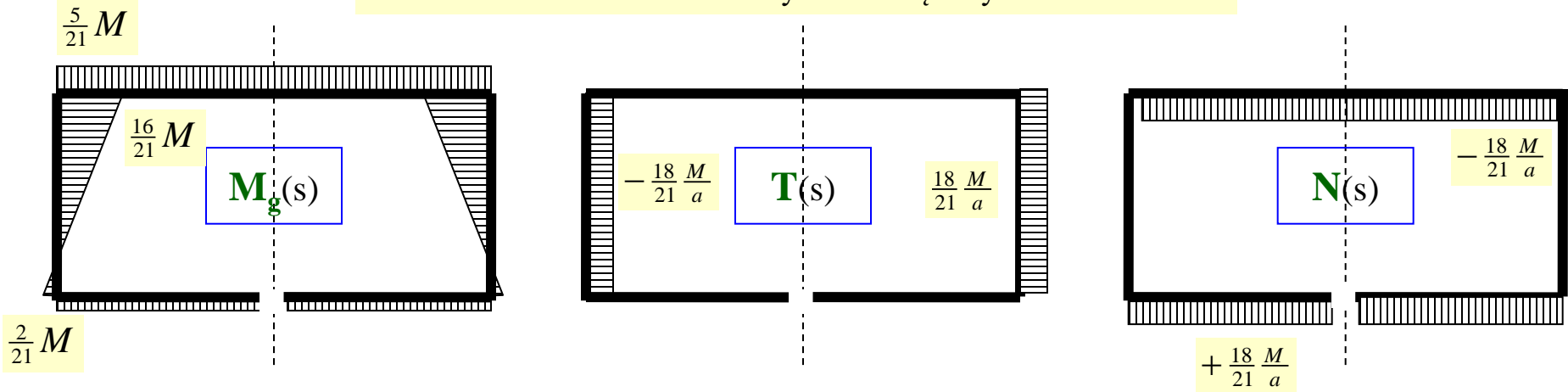
$$X_1 = \frac{2}{21} M$$

$$X_2 = \frac{6M}{7a}$$

# Przykład.1. Rama płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrznie

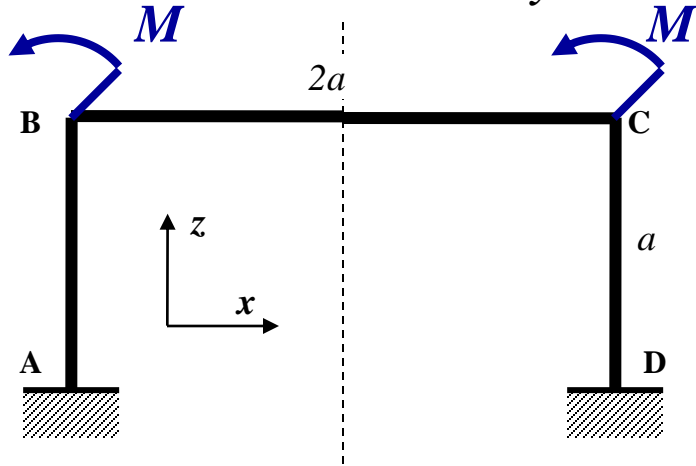


Końcowe rozkłady sił wewnętrznych:

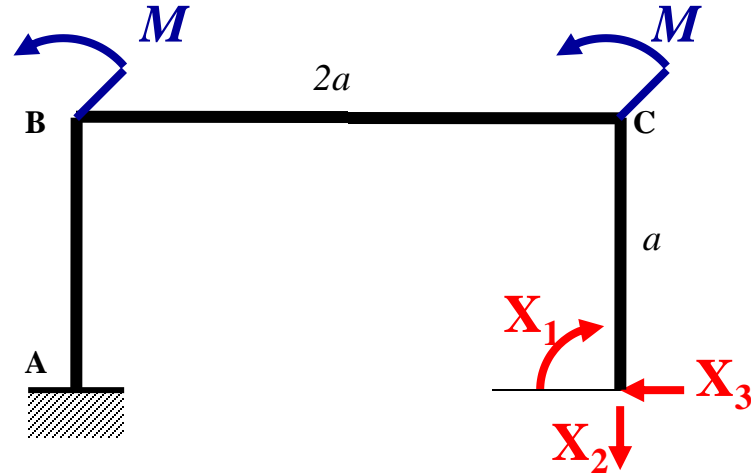


# Przykład.2. Rozwiązać ramę ściśle płaską statycznie niewyznaczalną

Dane:  $M, a, EJ_y$

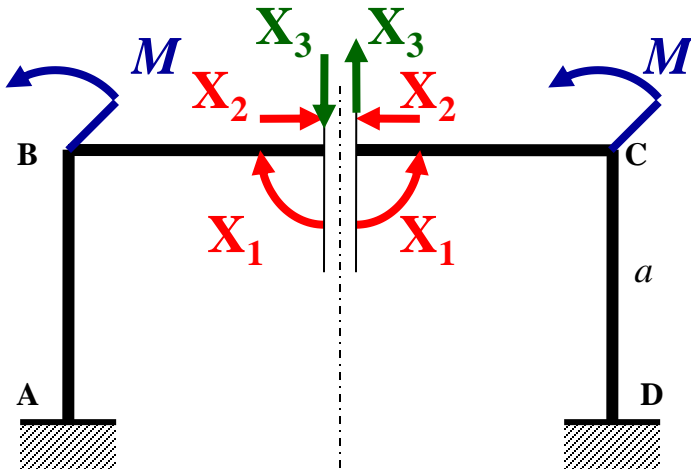


RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Zadanie 3 krotnie statycznie niewyznaczalne zewnętrznie !

WYMYŚLAMY LEPSZY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Konstrukcja symetryczna a obciążenie antysymetryczne!

Jeśli przetniemy na osi symetrii, to istnieją tylko składowe antysymetryczne sił wewnętrznych!

$$X_1 = 0 \quad X_2 = 0$$

składowe symetryczne

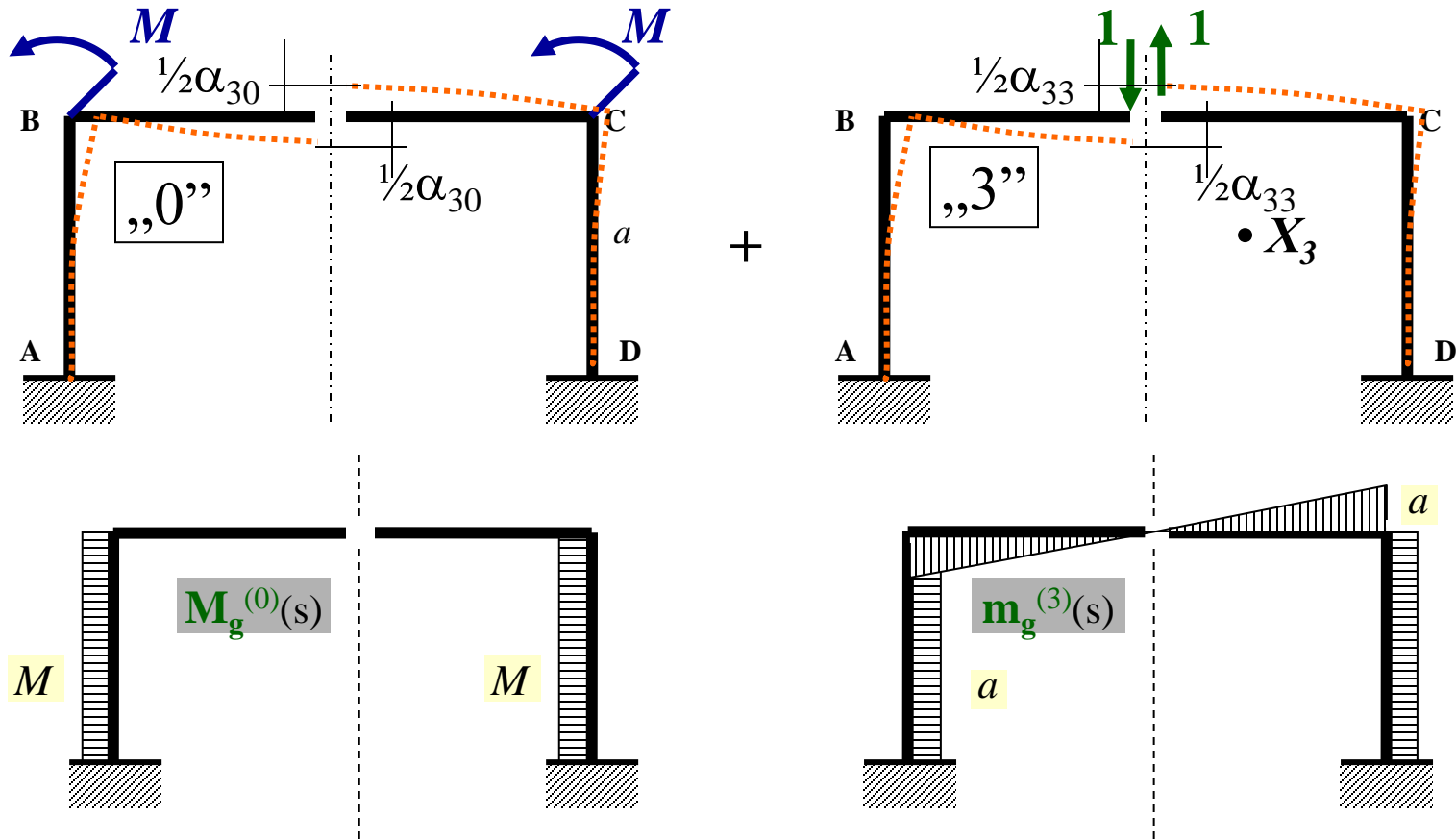
$$X_3 \neq 0$$

składowe antysymetryczne

Zadanie 1 krotnie statycznie niewyznaczalne wewnętrznie !

# Przykład.2. Rama ściśle płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrz

## SUPERPOZYCJA STANÓW:

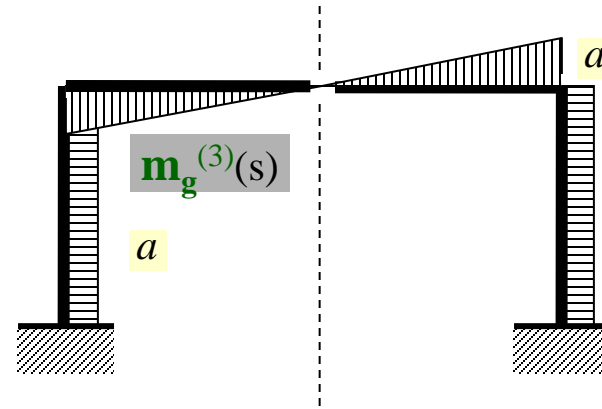
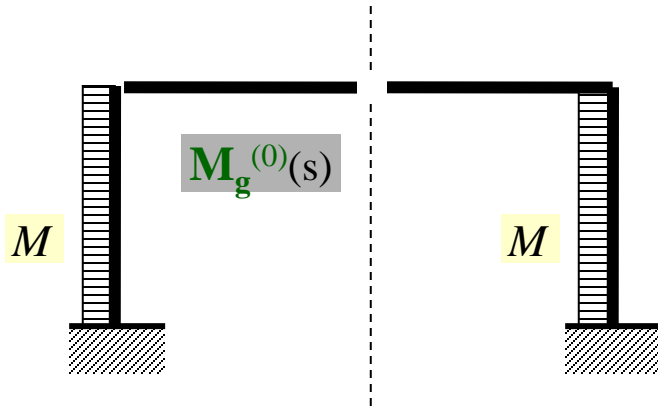


Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{30} + \alpha_{33} \cdot X_3 = 0$$

Równanie kanoniczne metody sił Maxwella-Mohra

# Przykład.2. Rama ściśle płaska statycznie niewyznaczalna wewnątrz

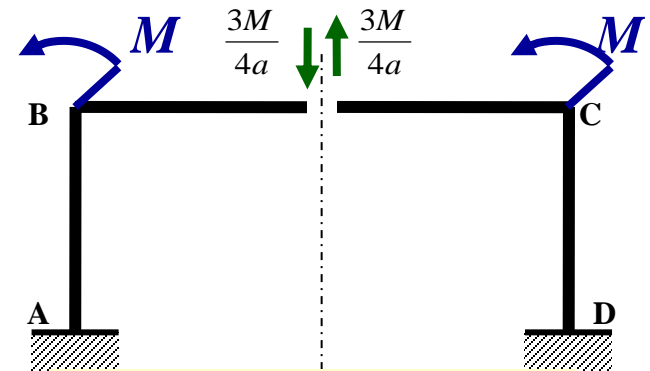


Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

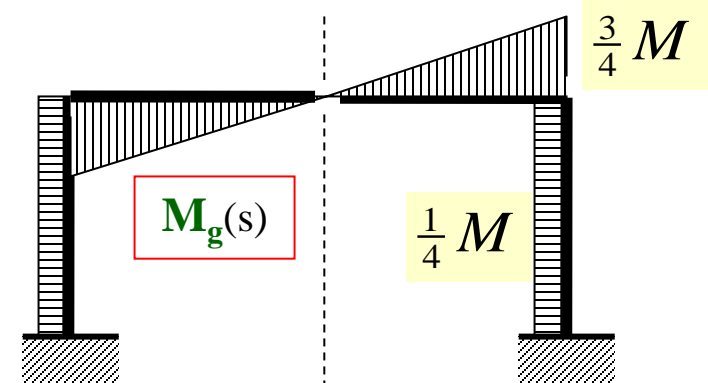
$$\alpha_{33} \cong \int_l \frac{m^{(3)} \cdot m^{(3)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left( \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a + a^2 \cdot a \right) \cdot 2 = \frac{8a^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{30} \cong \int_l \frac{m^{(3)} \cdot M^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} (aM \cdot (-a)) \cdot 2 = -\frac{2Ma^2}{EJ_y}$$

$$-\frac{2Ma^2}{EJ_y} + \frac{8a^3}{3EJ_y} \cdot X_3 = 0 \quad \rightarrow \quad X_3 = \frac{3M}{4a}$$



RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY

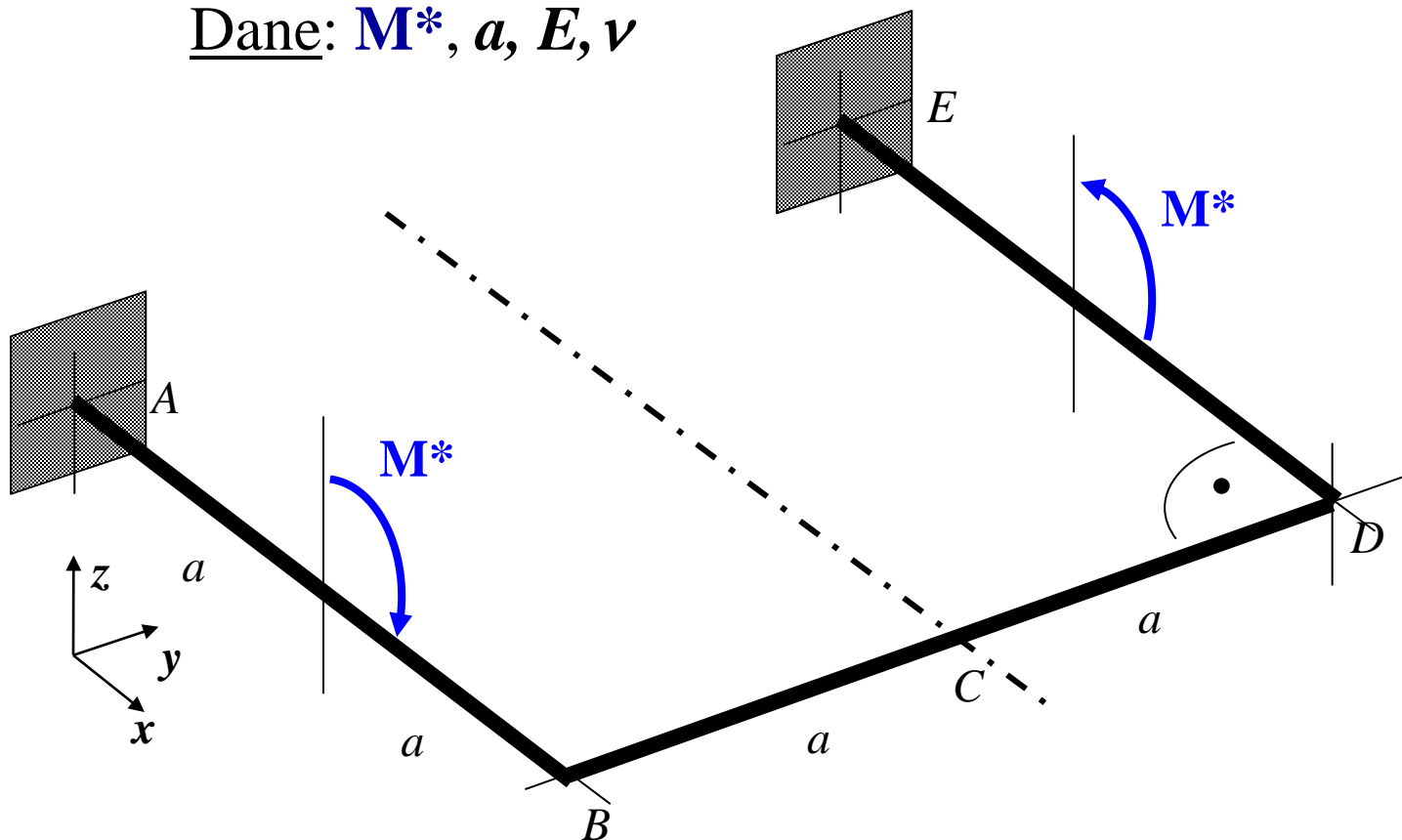


Końcowe rozkłady momentów gnących



**Przykład.3.** Rozwiązać ramę płaską statycznie niewyznaczalną obciążoną niepełsko

Dane:  $M^*$ ,  $a$ ,  $E$ ,  $\nu$

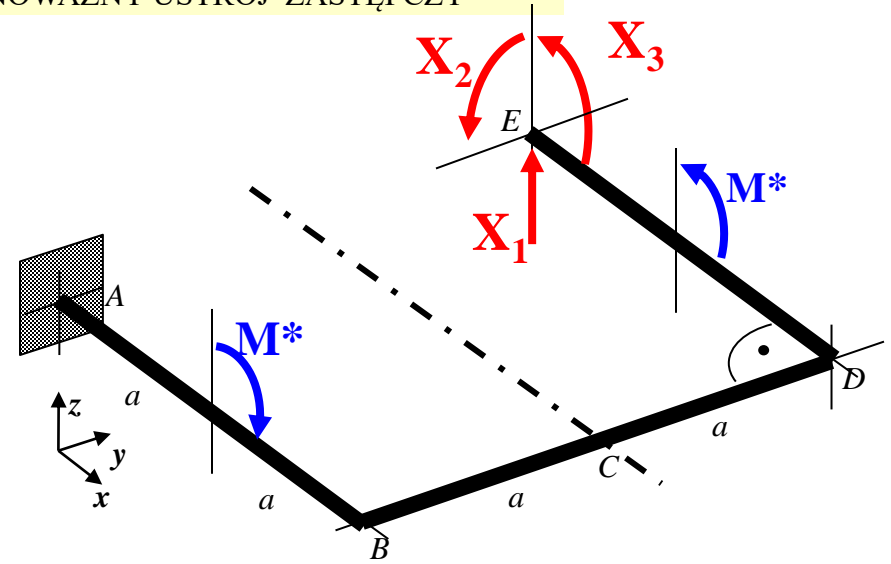
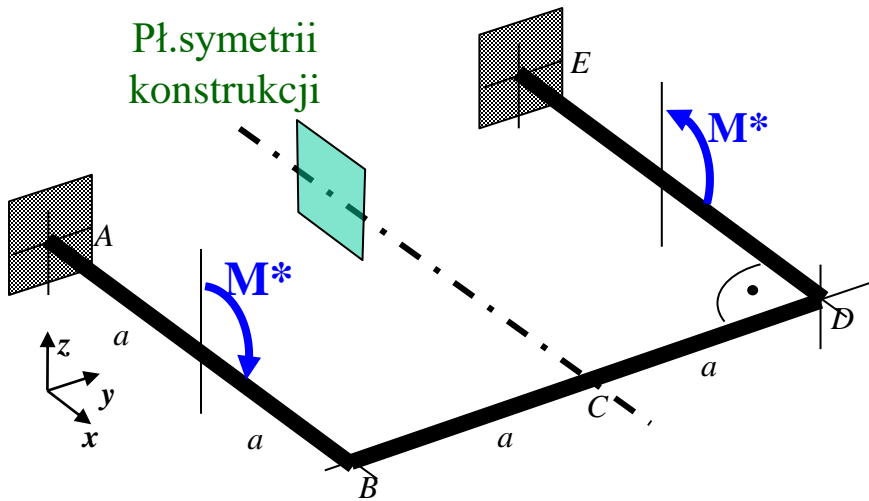


Charakterystyki przekroju:

$$GJ_s = \frac{10}{13} EJ_y$$

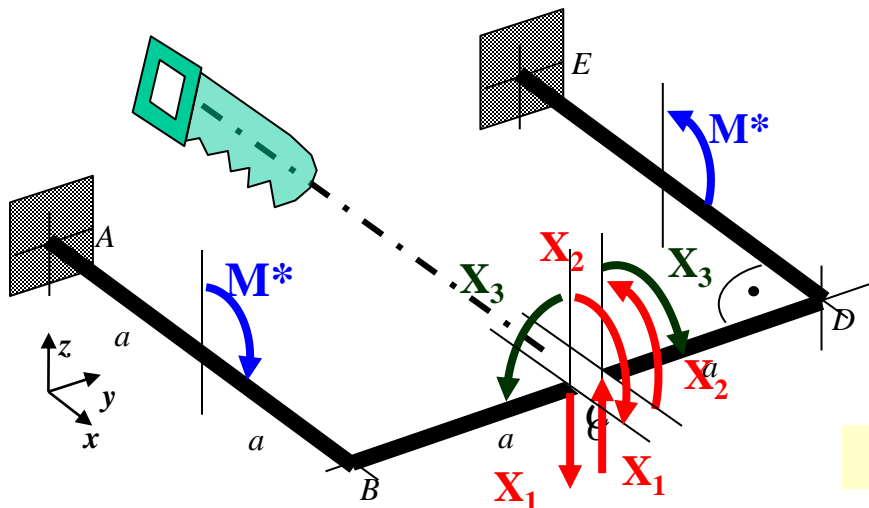
# Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepłasko

## RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



Zadanie 3 krotnie statycznie niewyznaczalne zewnątrz !

## WYMYŚLAMY LEPSZY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



**Konstrukcja symetryczna a obciążenie antysymetryczne!**  
**Jeśli przetniemy w płaszczyźnie symetrii, to istnieją tylko składowe antysymetryczne sił wewnętrznych:**

$$X_1 \neq 0 \quad X_2 \neq 0$$

składowe antysymetryczne

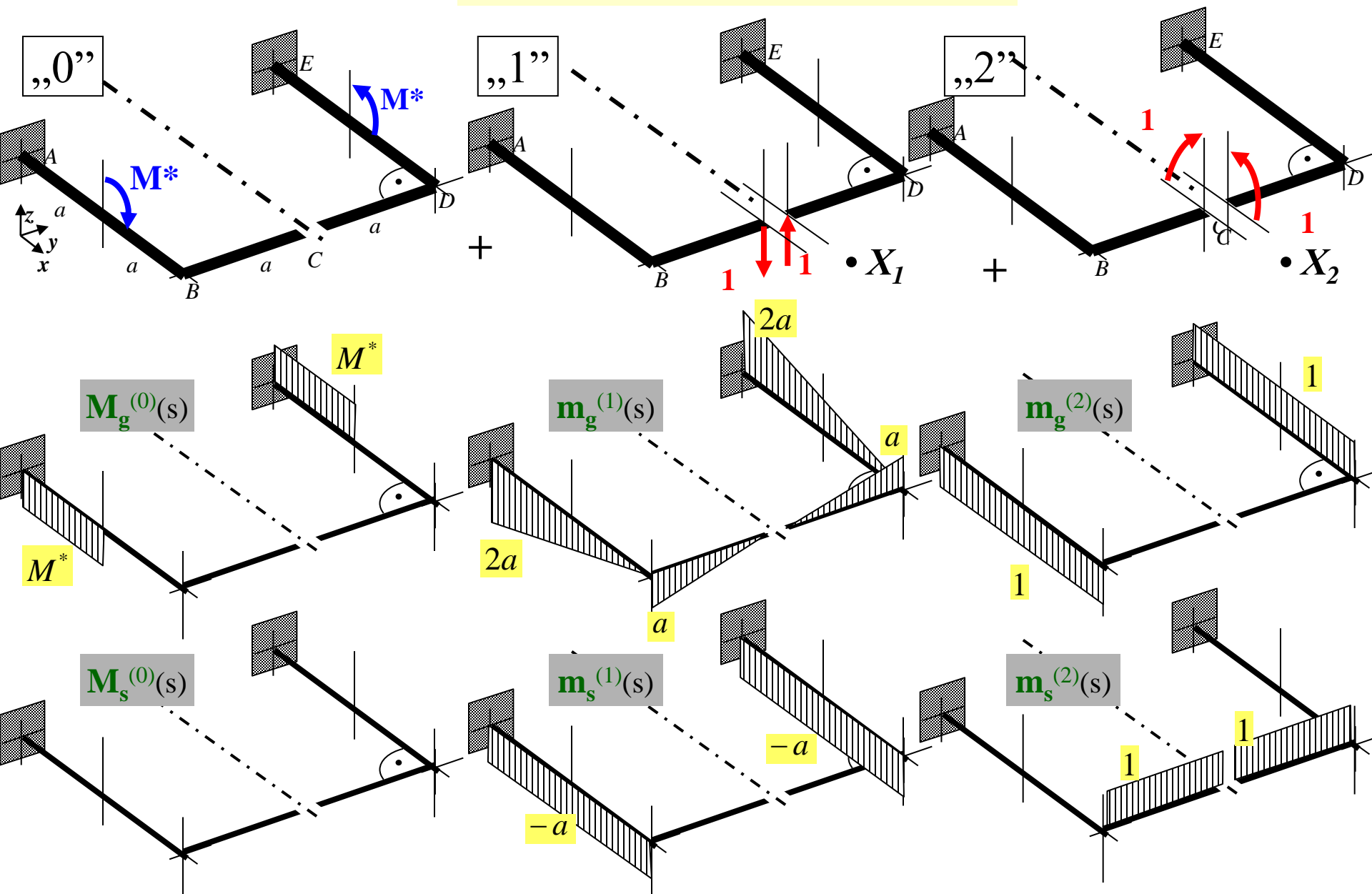
$$X_3 = 0$$

składowe symetryczne

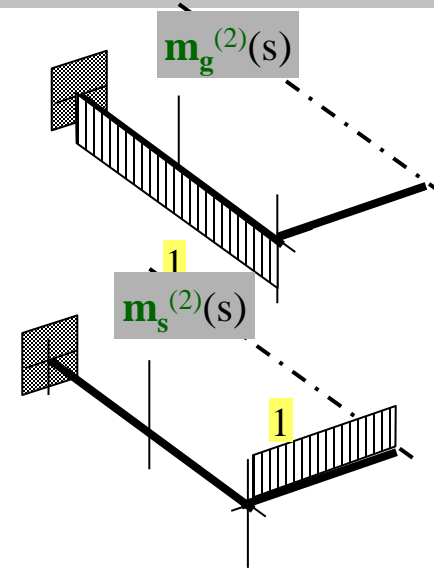
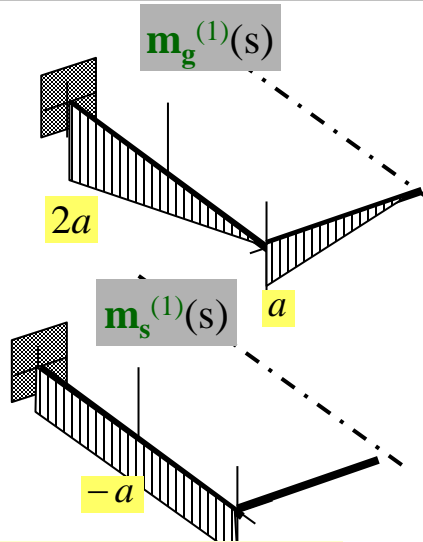
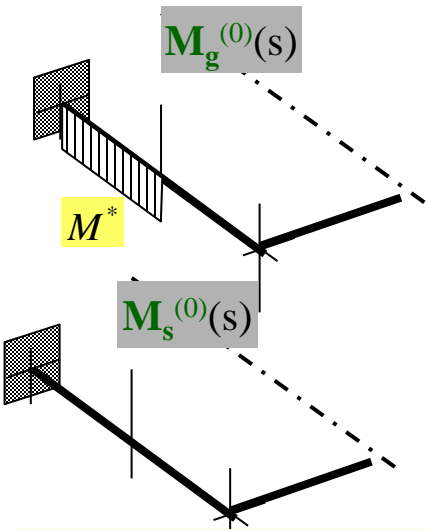
Zadanie 2 krotnie statycznie niewyznaczalna wewnątrz !

Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepłasko

SUPERPOZYCJA STANÓW:



# Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepunktowo



Współczynniki równań kanonicznych można teraz liczyć dla połówki konstrukcji interpretując je jako połowa względnego przemieszczenia względnego przekrojów!

Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

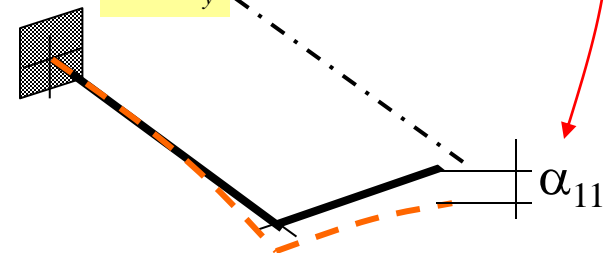
$$\alpha_{11} \cong \frac{1}{EJ_y} \left( \frac{1}{2} (2a)^2 \cdot \frac{2}{3} 2a + \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a \right) + \frac{1}{GJ_s} 2a^3 = \frac{3a^3}{EJ_y} + \frac{13}{10} \frac{2a^3}{EJ_y} = \frac{56a^3}{10EJ_y}$$

$$\alpha_{12} \cong \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} (2a)^2 \cdot a + 0 = \frac{2a^2}{EJ_y}$$

$$\alpha_{22} \cong \frac{1}{EJ_y} 2a \cdot 1 + \frac{1}{GJ_s} a \cdot 1 = \frac{2a}{EJ_y} + \frac{13}{10} \frac{a}{EJ_y} = \frac{33a}{10EJ_y}$$

$$\alpha_{10} \cong \frac{1}{EJ_y} M^* a \frac{3}{4} 2a + 0 = \frac{3M^* a^2}{2EJ_y}$$

$$\alpha_{20} \cong \frac{1}{EJ_y} M^* a \cdot 1 + 0 = \frac{M^* a}{EJ_y}$$



$$\begin{aligned} \frac{3M^* a^2}{2EJ_y} + \frac{56a^3}{10EJ_y} \cdot X_1 + \frac{2a^2}{EJ_y} \cdot X_2 &= 0 \\ \frac{M^* a}{EJ_y} + \frac{2a^2}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{33a}{10EJ_y} \cdot X_2 &= 0 \end{aligned}$$



$$X_1 = -0,2 M^* / a$$

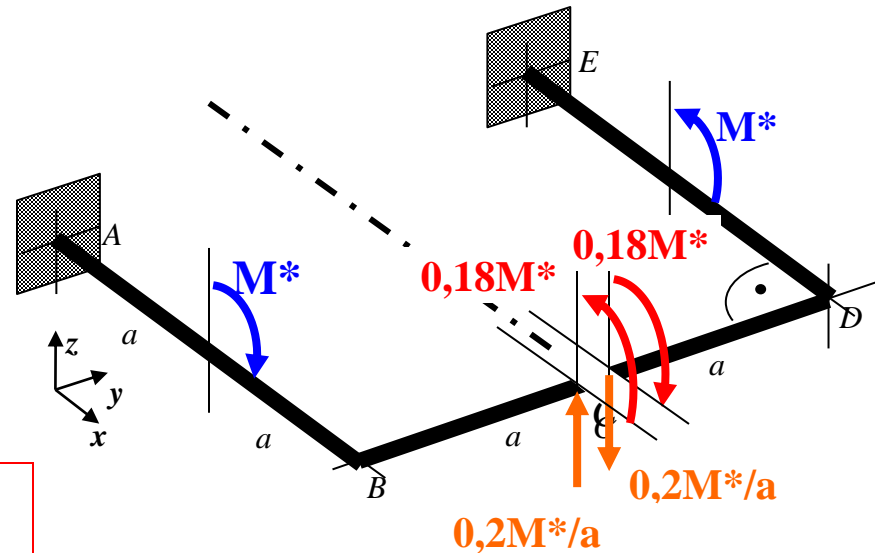
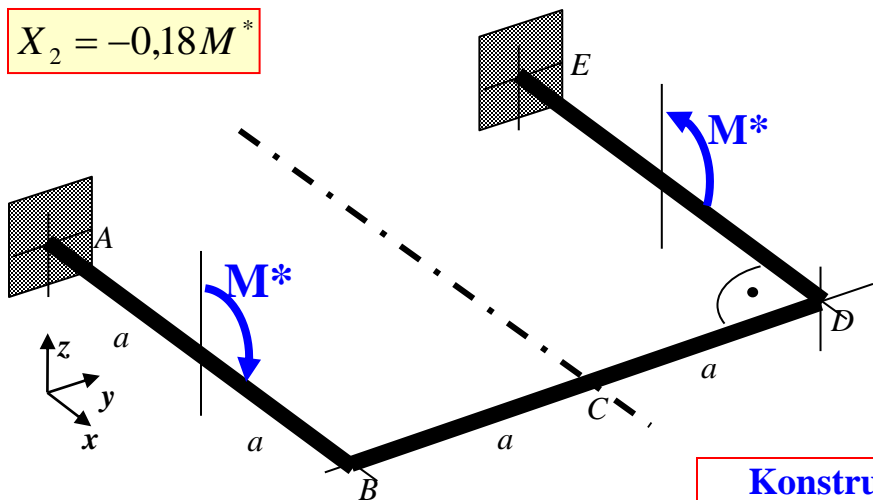
$$X_2 = -0,18 M^*$$

# Przykład.3. Rama płaska statycznie niewyznaczalna obciążona niepełsko

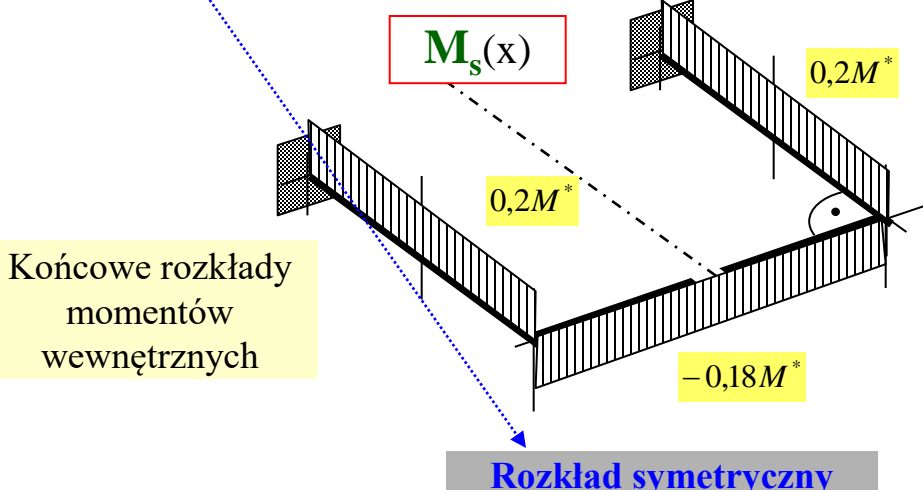
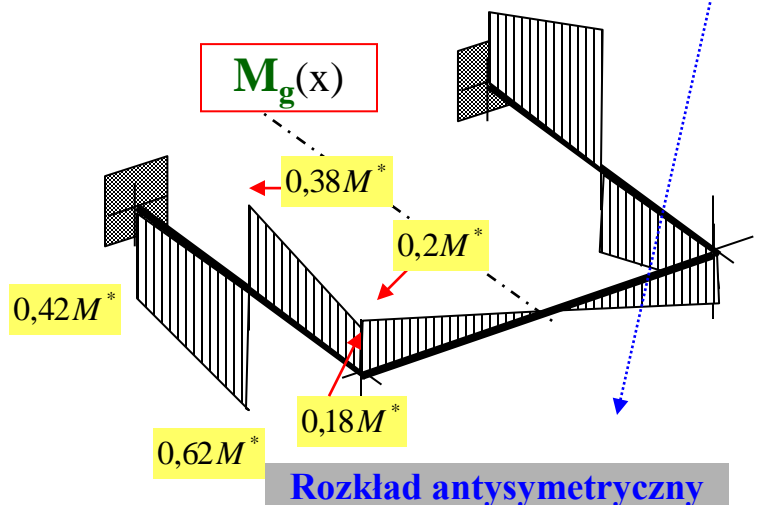
$$X_1 = -0,2 M^* / a$$

$$X_2 = -0,18 M^*$$

RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY:

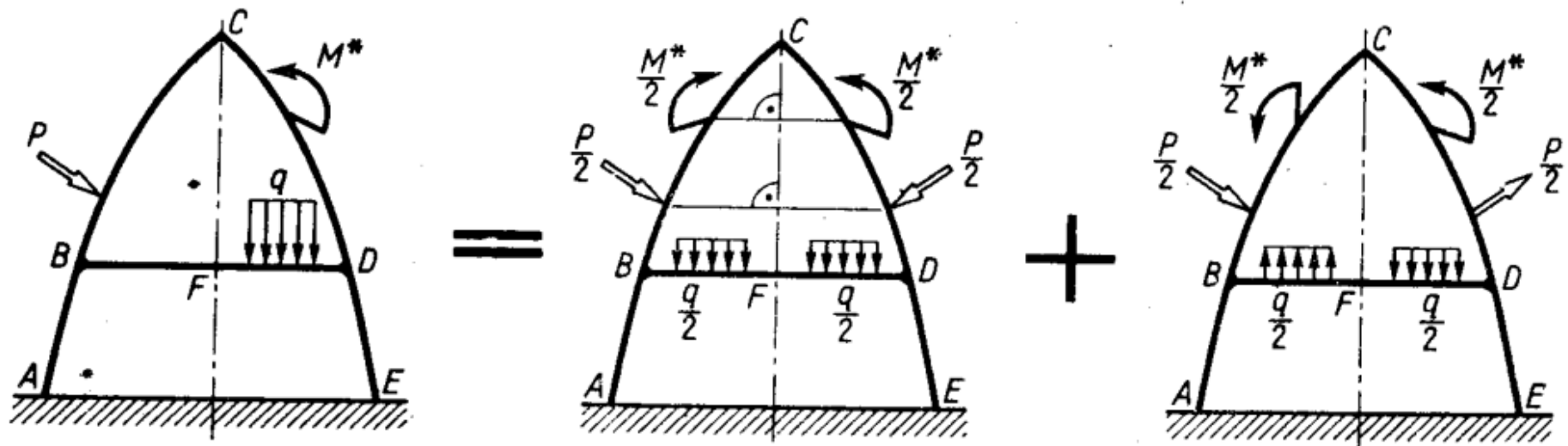


Konstrukcja symetryczna a obciążenie antysymetryczne



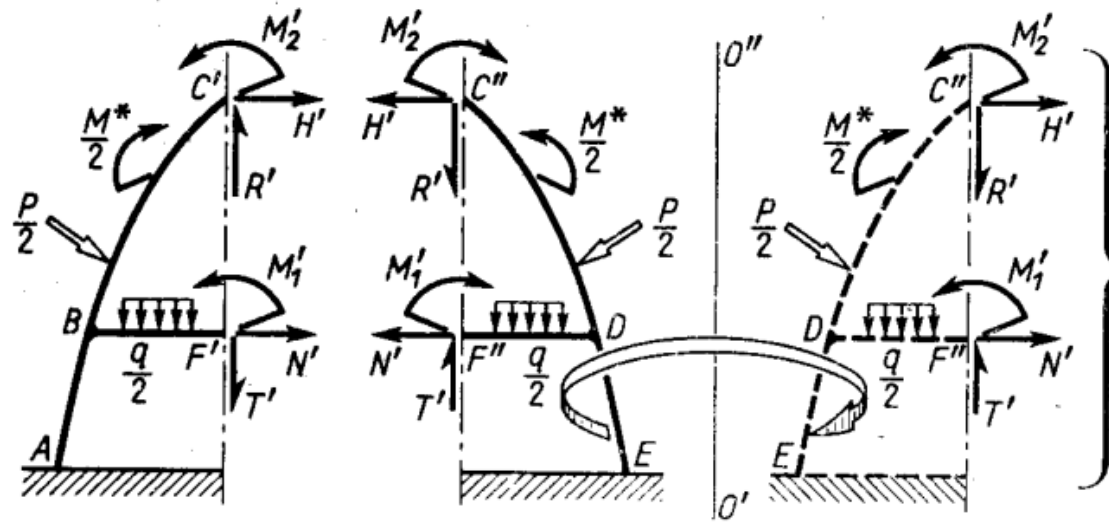
Końcowe rozkłady momentów wewnętrznych

# Rozkład obciążenia na symetryczne i antysymetryczne



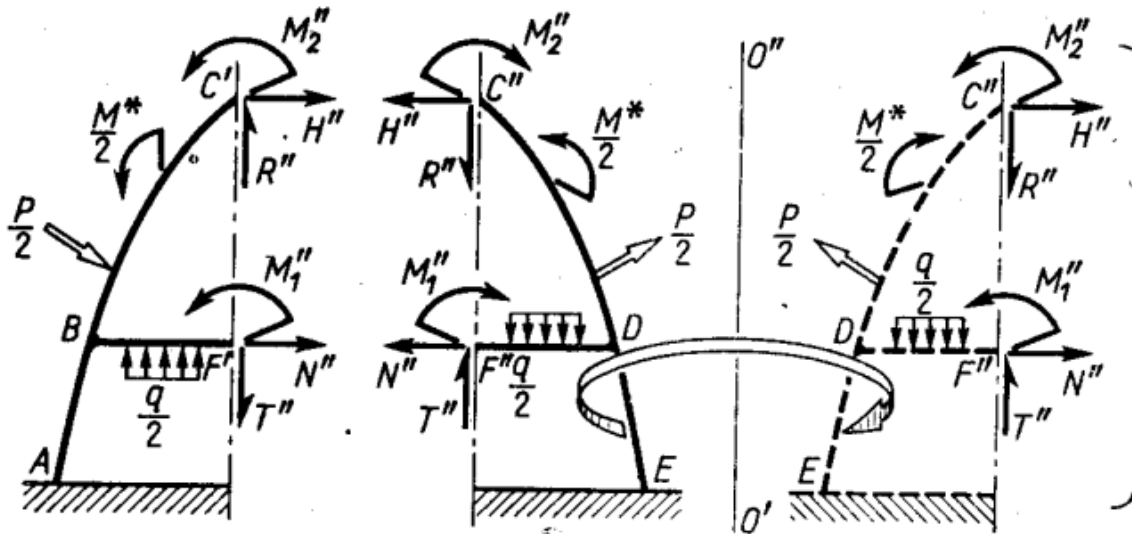
Rys. 10.10. Rozkład obciążenia na symetryczne i antysymetryczne

# Cechy obciążeń symetrycznego i antysymetrycznego



Po obrocie względem osi  $O'O''$  prawa połowka staje się kopia lewej tak samo obciążoną. Z zasady jednoznaczności siły wewnętrzne muszą być te same. Aby tak było, musi być  $R' = T' = 0$ .

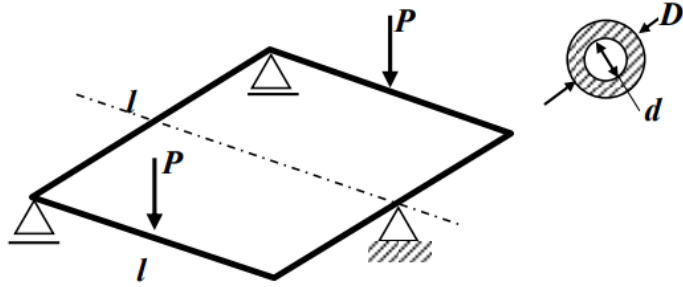
Rys. 10.11. Oddziaływania w płaszczyźnie symetrii przy obciążeniu symetrycznym



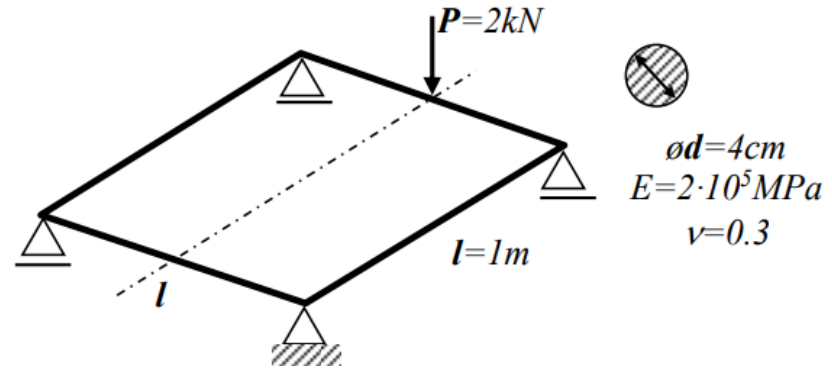
Po obrocie względem osi  $O'O''$  prawa połowka staje się kopia lewej odwrotnie obciążoną. Z zasady jednoznaczności siły wewnętrzne muszą być przeciwne. Aby tak było, musi być  $M_1'' = M_2'' = 0$  i  $N'' = H'' = 0$ .

Rys. 10.12. Oddziaływania w płaszczyźnie symetrii przy obciążeniu antysymetrycznym

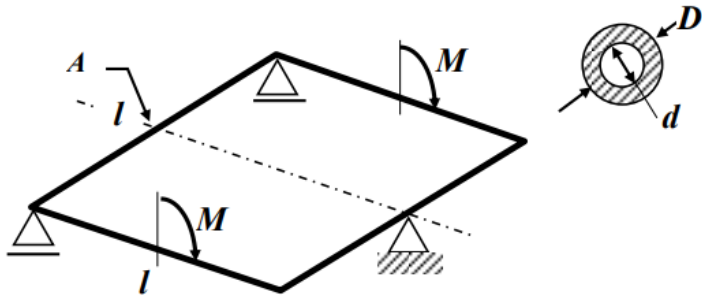
# Przykład zadań z egzaminów (*symetria konstr.* i *symetria obciążenia*)



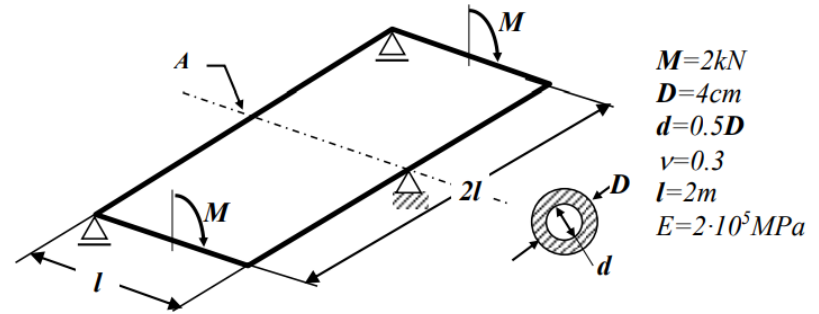
$P=4kN$   
 $D=4cm$   
 $d=0.5D$   
 $\nu=0.3$   
 $l=2m$   
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$



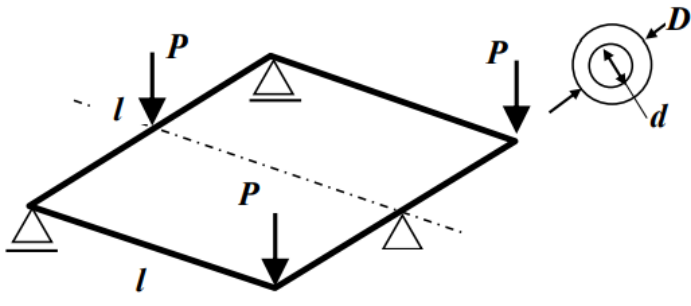
$\sigma d=4cm$   
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$   
 $\nu=0.3$



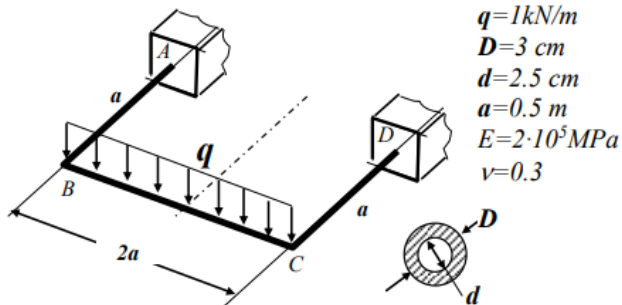
$M=2kN$   
 $D=4cm$   
 $d=0.5D$   
 $\nu=0.3$   
 $l=2m$   
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$



$M=2kN$   
 $D=4cm$   
 $d=0.5D$   
 $\nu=0.3$   
 $l=2m$   
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$

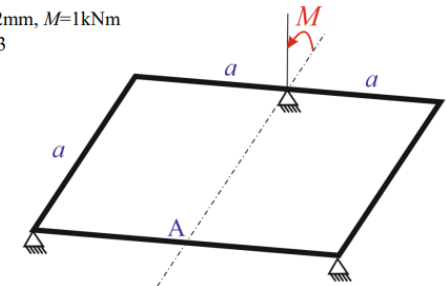
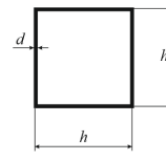


$P=2kN$   
 $D=4cm$   
 $d=0.5D$   
 $\nu=0.3$   
 $l=2m$   
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$



$q=1kN/m$   
 $D=3cm$   
 $d=2.5cm$   
 $a=0.5m$   
 $E=2 \cdot 10^5 MPa$   
 $\nu=0.3$

Dane:  
 $a=1m, h=50mm, d=2mm, M=1kNm$   
 $E=2 \cdot 10^5 MPa, \nu=0,3$   
 Przekrój prętów





Przykład zadań z egzaminów (*symetria konstr. i antysymetria obciążenia*)

